Chapitre 18 : Dimension

Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Exercice 1: Pour chacun des espaces vectoriels E considérés ci-dessous, déterminer une base de E et donner sa dimension.

1. $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, 2y + z - t = 0\right\}$
2. $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = 2y = 3z\right\}$
3. $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = 0\}$
4. $E = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$ où $f_1 = \text{ch}$; $f_2 = \text{sh}$; $f_3 = \exp$ et $f_4 = \frac{1}{\exp}$.
5. $E = \text{Vect}((X-1)^2, X^2, (X+1)^2)$.

Exercice 2: On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel

$$E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0\}.$$

Déterminer une base de E et donner sa dimension.

Exercice 3: Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $P_k = (X+k)^k$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 4: (*) On considère le sous-ensemble suivant de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$E = \{x \mapsto A\cos(x+\phi) \ / \ (A,\phi) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, puis déterminer sa dimension ainsi qu'une base.

Sous-espaces vectoriels et dimension

Exercice 5: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer les dimensions respectives de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ et de l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 6: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$.
Montrer que F et G ont au moins un vecteur non nul en commun.

Exercice 7: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans l'espace $E = \mathbb{R}^n$.
Soient A et B les deux sous-ensembles de E ci-dessous :

$$A = \{(\lambda, \dots, \lambda)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

Montrer que A et B sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de deux manières différentes.

Exercice 8: On définit les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + 3z = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{(t,-t,3t) \in \mathbb{R}^3 \ / \ t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la décomposition $F \oplus G$.

Exercice 9: Soit $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y + 3z = 0\right\}$.

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une base de F. En déduire la dimension de F.
3. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 10: On pose $F = \text{Vect}\left((X-1), (X+2)^2\right)$.

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ de dimension 2.
2. Trouver une base de $\mathbb{R}_4[X]$ adaptée à F, puis déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 11: On pose

$$F = \text{Vect}\left((1,0,0,0), (1,2,0,0)\right) \text{ et } G = \text{Vect}\left((3,1,1,1), (4,4,1,1), (1,5,5,0)\right).$$

Déterminer $F \cap G$. *On pourra tout d'abord calculer* $\dim(F \cap G)$.

Exercice 12: Considérons

$$S = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ telles que } f'' - 2f' + f = 0 \text{ et } f'' + 3f' - 4f = 0\}$$

Montrer que S est une droite vectorielle et déterminer une base de S.

Exercice 13: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient H et H' deux hyperplans distincts de E.

1. Déterminer la dimension de $H \cap H'$ à l'aide de la formule de Grassmann.
2. On veut montrer que H et H' ont un supplémentaire commun.
   (a) Quelle est la dimension des supplémentaires de H et de H' ?
   (b) Montrer que $\exists (u,v) \in H \times H',\ u \notin H'$ et $v \notin H$.
   (c) Montrer que $w = u + v \notin H \cup H'$.
   (d) Proposer un supplémentaire commun à H et à H'.

Rang d'une famille de vecteurs

Exercice 14: Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $x_1 = (-1,2,2)$, $x_2 = (4,-2,-1)$, $x_3 = (3,-1,1)$, $x_4 = (7,-3,0)$
2. $x_1 = (1,1,0,1)$, $x_2 = (1,-1,0,1)$, $x_3 = (2,0,1,1)$, $x_4 = (0,-2,1,-1)$
3. $P_1 = X - 1$, $P_2 = 2X$, $P_3 = X^2 - 3X$ et $P_4 = 3X^3 + X^2 - 2$

Exercice 15: Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{]-1\,;1[}$, on considère les fonctions suivantes

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \qquad f_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Montrer que la famille (f_1, f_2) est libre.
2. Calculer $\mathrm{rg}(f_1, f_2, f_3)$.

Exercice 16: Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $f_k : t \longmapsto \cos(kt)$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} f_k(t)\, f_p(t)\,\mathrm{d}t$ pour k et p deux entiers naturels.
2. En déduire que la famille $(f_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Que dire de la dimension de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $g_k : t \longmapsto \cos^k(t)$.
   Montrer que $\mathrm{Vect}(f_0, \dots, f_n) = \mathrm{Vect}(g_0, \dots, g_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer le rang de la famille $(g_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que la famille $(g_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}$.